## Cahier de vacances de mathématiques

*Le but de ce devoir d'été est de vous permettre d'arriver à la rentrée prêts pour commencer tout de suite le travail vers les concours. Il s'agit d'une part d'exercices techniques qui ne se veulent pas difficiles, mais qu'il faut parfaitement maitriser, c'est-à-dire être capable de les faire vite et bien. D'autre part, en fin de devoir viennent des exercices de probabilités et d'analyse qui utilisent des notions vues au cours de votre lycée, mais qui demande peut-être un peu plus de réflexion.*
*Tout au long de ce devoir, il vous est demandé de porter une grande attention à la rédaction.*
*Dernier conseil enfin: il s'agit d'une préparation à la rentrée,il ne faut donc pas le faire trop longtemps avant la rentrée, mais il ne s'agit pas non plus de le commencer la veille de la rentrée. Comme tout au long de votre préparation au concours, un travail* ***régulier et personnel*** *est toujours le plus efficace. Dès le début d'année, des évaluations porteront sur les différentes techniques revues au cours de ce devoir. Redisons le: "à vous de faire de ce travail une occasion d'apprendre ou revoir différents points". Plus que le résultat final, c'est bien cette démarche qui est importante ici.*
*Ce devoir sera ramassé et corrigé, mais il ne donnera pas lieu à une évaluation chiffrée et en aucun cas, il ne sera utilisé pour avoir une idée de votre niveau! Il est corrigé afin de vous permettre de reprendre vos erreurs rapidement! À vous d'utiliser au mieux cet outil qui vous est proposé!*
*La semaine de la rentrée, une évaluation permettra de vérifier le travail fait sur les partie "technique". Vous verrez que les autres exercices seront rapidement utiles pour réussir. Ne les négligez pas !*
*En cas de question, je suis joignable par mail : yolaine.pollak@gmail.com*

# 1 Du calcul numérique et littéral

*comme vous le savez sans doute, la calculatrice n'est pas autorisée aux concours. Il faut donc être à l'aise avec tout type de calcul. Ici, on vous demande de donner chacun des nombres suivants de façon "simplifiée": en particulier les quotients seront réduits au maximum et il ne devra pas y avoir de radical au dénominateur. Évidemment, l'usage de la calculatrice est interdit ici! (Comme dans le reste du devoir d'ailleurs.)*

**1.** $\dfrac{49}{56}+\dfrac{30}{72}$

**2.** $\dfrac{12}{49}\times\dfrac{35}{33}\times\dfrac{21}{20}$

**3.** $\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}}{\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{21}}$

**4.** $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$

**5.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

**6.** $\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}$

**7.** $2^5\times 2^{-6}\times\sqrt{2}$

**8.** $\dfrac{5^3}{25}$

**Exercice 1** Simplifier les expressions suivantes; on ne demande pas le domaine de validité (*i.e.* on admet que toutes ces expressions ont un sens):

1. $A = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$
2. $B = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1$
3. $C = \dfrac{\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7}\right)}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^3} + \dfrac{\frac{1}{7}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}$
4. $D = \dfrac{\frac{a^2+b^2}{b}+2a}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
5. $E = \dfrac{2}{x(x-1)}\left(\dfrac{x^2(x-1)}{2} - \dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}\right)$
6. $F = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}$
7. $G = \dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$
8. $H = 2^n + 2^n$
9. $I = \left(2^{2^n}\right)^{2^n}$
10. $J = 2^{2^n} \times 2^{2^n}$
11. $K = 2^{n+1} - 2^n$
12. $L = \dfrac{(2^3 \times 7^5)^{-2}}{(7^3 \times 2^{-3})^3}$
13. $M = \left[\dfrac{(3\times 7^2)^{-2}\times 2}{2^{-2}\times 3^3 \times 7^{-3}}\right]^{-3}$
14. $N = \left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^3 \times \left[\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-2}\right]^3$
15. $O = \left(-\dfrac{5^2}{2^4}\right)^{-3} \times \left(-\dfrac{4}{9}\right)^6$
16. $P = \dfrac{(ab^{-1})^3}{c^2b^{-2}} + \dfrac{(acb^{-1})^{-2}}{bc^{-2}} \times \dfrac{(a^3b)^2}{(cb)^3}$
17. $Q = \dfrac{(a^2b^{-2})^{-5}}{(c^{-2}b^3)^{-2}} \times \dfrac{ab-c^{-1}}{c-(ab)^{-1}}$
18. $R = \dfrac{(e^x)^y - e^y e^{-x}}{(e^y)^x - \frac{1}{e^{-y}e^x}}$
19. $S = \dfrac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{\ln a + \ln b}$
20. $T = \ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right) + 2\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$
21. $U = \dfrac{e^{2\alpha}}{(e^\alpha)^2 - \frac{1}{e^{-3\alpha}}}$

# 2 Calculs de dérivée

*Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'expression de la dérivée sur l'ensemble donné.*

1. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 7$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ sur $I = ]0; +\infty[$
3. $f(x) = (2x^2+3)(5x^2-6x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = (e^x + 2x)\left(x^3 - \dfrac{1}{x}\right)$ sur $I = \mathbb{R}^*$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{3\ln(x)+1}{e^x-1}$ sur $I = ]0; +\infty[$
7. $f(x) = (3x^2+1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = e^{x^2-3x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = e^{-\sqrt{3x}}$ sur $I = ]0; +\infty[$

# 3 Calculs d'intégrales

*Certains calculs sont vraiment "de base", mais certains peuvent parfois être plus astucieux. L'idée est toujours de chercher, même si cela n'aboutit pas!*

1. $\displaystyle\int_0^1 (2x+5)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 (4x^3+5x^2-1)\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 (3x-1)^2\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 e^{5x-1}\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}ds$

## 4 Résolution d'équations et d'inéquations

**1.** $x^2-4x+3=0$
**2.** $3x^2+2x-1=0$
**3.** $4x^2-4x+1=0$
**4.** $2x^2+x+3=0$
**5.** $(2x-3)^2=(3x-2)^2$
**6.** $x^2-5x-3\geq 0$
**7.** $\dfrac{2x-7}{4x-1}\geq 0$
**8.** $\dfrac{4x+3}{2x-1}<2$
**9.** $\dfrac{9x+1}{7x-4}>\dfrac{3x+5}{2x-4}$
**10.** $\begin{cases} 4x+7y=3 \\ 2x-3y=-5 \end{cases}$
**11.** $\begin{cases} 2x-7y=3 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$
**12.** $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=1 \\ 2x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$
**13.** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{5}y=1 \\ -10x+3y=-15 \end{cases}$
**14.** $x-2=\sqrt{x}$
**15.** $3x^4+5x^2-2=0$
**16.** $x-2+\dfrac{1}{3-x}=0;$
**17.** $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$
**18.** $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$
**19.** $\ln(-x-2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3)$
**20.** $\sqrt{x^2-4}=3-x$
**21.** $\dfrac{x\sqrt{x-2}}{x-3}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}.$

## 5 Un peu de logique...

**Exercice 1** Voici quelques "démonstrations" d'égalités évidemment fausses. Ainsi les démonstrations les sont aussi! A vous de trouver l'erreur.

**1.** On pose $a=1$,$b=1$.

$$\begin{aligned} a=b &\Rightarrow a^2=b^2 \\ &\Rightarrow a^2-b^2=0 \\ &\Rightarrow (a-b)(a+b)=0 \\ &\Rightarrow a+b=0 \\ &\Rightarrow 2=0 \end{aligned}$$

**2.** On pose $a=b$, avec $a$ et $b$ non nuls.

$$\begin{aligned} a=b &\Rightarrow a^2=ab \\ &\Rightarrow a^2-b^2=ab-b^2 \\ &\Rightarrow (a-b)(a+b)=b(a-b) \\ &\Rightarrow a+b=b \\ &\Rightarrow 2b=b \\ &\Rightarrow 2=1 \end{aligned}$$

**3.**

$$\begin{aligned}
-2=-2 &\Rightarrow 4-6=1-3\\
&\Rightarrow 4-6+\frac{9}{4}=1-3+\frac{9}{4}\\
&\Rightarrow \left(2-\frac{3}{2}\right)^2=\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\\
&\Rightarrow 2-\frac{3}{2}=1-\frac{3}{2}\\
&\Rightarrow 2=1
\end{aligned}$$

## Exercice 2

**1.** On considère la proposition suivantes: "Tous les étudiants de Passy Buzenval qui ont passé les concours ont eu une école et un bon emploi."
La négation de cette proposition est:
- **a.** "Tous les étudiants de Passy Buzenval qui n'ont pas passé de concours n'ont pas eu d'école et n'ont pas un bon emploi."
- **b.** "Tous les étudiants de Passy Buzenval qui n'ont pas passé de concours n'ont pas eu d'école ou n'ont pas un bon emploi."
- **c.** "Il existe des étudiants de Passy Buzenval qui ont passé les concours qui n'ont pas eu d'école et qui n'ont pas un bon emploi."
- **d.** "Il existe des étudiants de Passy Buzenval qui ont passé les concours qui n'ont pas eu d'école ou qui n'ont pas un bon emploi."

**2.** On considère la proposition suivante: "Je passerai mes vacances d'été en Egypte ou en Turquie".
La négation de cette proposition est:

- **a.** Je ne passerai pas mes vacances d'été en Egypte ou en Turquie.
- **b.** Je ne passerai pas mes vacances d'été ni en Egypte ni en Turquie.
- **c.** Je ne partirai pas pendant les vacances d'été.
- **d.** Je ne passerai pas mes vacances d'hiver en Egypte ou en Turquie.

**3.** On considère la proposition suivante: "s'il fait beau, j'irai à la plage".
La négation de cette proposition est:
- **a.** S'il fait beau, je n'irai pas à la plage.
- **b.** S'il ne fait pas beau, je n'irai pas à la plage.
- **c.** S'il ne fait pas beau, j'irai à la plage.
- **d.** Il fait beau et je ne vais pas à la plage.

**4.** On considère la proposition "Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas souvent". Laquelle est des propositions suivantes lui est équivalente?
- **a.** Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas.
- **b.** Les personnes qui réfléchissent souvent ne parlent pas trop.
- **c.** Les personnes qui réfléchissent souvent parlent trop.
- **d.** Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent.

**5.** On considère la proposition suivante: "$x \in \mathbb{R}, \quad (x=1) \Rightarrow (x^2=1)$". Cette proposition est-elle vraie?

**6.** On considère la proposition suivante: "$x \in \mathbb{R}, \quad (x^2=1) \Rightarrow (x=1)$". Cette proposition est-elle vraie?

**7.** Pour tout réel $x$, il existe $y$ réel tel que $y < x$. Cette proposition est-elle vraie?

**8.** Il existe un réel $x$ tel que pour tout réel $y$, $y < x$. Cette proposition est-elle vraie?

**9.** On considère la proposition suivante: "Pour tout réel $x$, il existe un réel $y$ tel que $y^2 > x$." Cette proposition est-elle vraie?

10. On considère la proposition suivante: "Il existe un réel $x$, tel que pour tout réel $y$, $y^2 > x$." Cette proposition est-elle vraie?
11. On considère la proposition suivante: "Pour tout réel $x$, pour tout réel $y$, $y^2 > x$." Cette proposition est-elle vraie?
12. On considère la proposition suivante: "Pour tout réel $x$, pour tout réel $y$, $x + y > 0$." Cette proposition est-elle vraie?
13. On considère la proposition suivante: "Pour tout réel $x$, il existe réel $y$ tel que $x + y > 0$." Cette proposition est-elle vraie?
14. On considère la proposition suivante: "Il existe un réel $x$ tel que pour tout réel $y$, $x+y > 0$." Cette proposition est-elle vraie?
15. Dans un champ, des extra-terrestres ont tiré sur un troupeau de 115 moutons. Ils meurent tous sauf 46.
    Combien en reste-t-il?
16. Un train quitte Paris pour Nantes et une heure plus tard, un autre train quitte Nantes pour Paris. Si les deux trains roulent exactement à la même vitesse, lequel des deux sera plus près de Nantes quand ils se croiseront?

**Exercice 3** Déterminer les raisonnements qui sont logiquement valides:

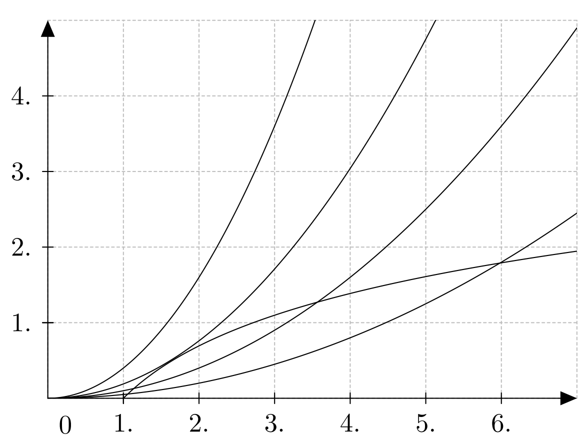
1. Tous les étudiants sont travailleurs. Jean est travailleur. Donc Jean est un étudiant.
2. Jean est un étudiant. Or tous les étudiants sont travailleurs. Donc Jean est travailleur.
3. Aucun étudiant n'est travailleur. Or Jean n'est pas travailleur. Donc Jean est un étudiant.
4. Aucun étudiant n'est travailleur. Or Jean est un étudiant. Donc il n'est pas travailleur.
5. La plupart des étudiants s'appellent Jean. Or tous les Jean sont travailleurs. Donc certains étudiants sont travailleurs.
6. Tous les étudiants s'appellent Jean. Or certains Jean sont travailleurs. Donc certains étudiants sont travailleurs.

# 6 Un peu d'analyse...

**Exercice 1** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel $a$ strictement positif, on définit sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction $g_a$ par $g_a(x) = ax^2$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $\Gamma_a$ celle de la fonction $g_a$ dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ suivant les valeurs du réel strictement positif $a$.

### Partie A

On a construit les courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.




1. Nommer les différentes courbes sur le graphique.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ suivant les valeurs (à préciser) du réel $a$.

**Partie B**

Pour un réel $a$ strictement positif, on considère la fonction $h_a$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que $x$ est l'abscisse d'un point $M$ appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. On admet que la fonction $h_a$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et on note $h'_a$ la dérivée de la fonction $h_a$ sur cet intervalle.
   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour $x$ appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.
   Le tableau de variation de la fonction $h_a$ est donné ci-dessous:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_a(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h_a$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{-1-\ln(2a)}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que
   $a = 0,1$.
   **a.** Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.
   On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}\ ;\ +\infty\right[$.
   **b.** Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{0,1}$ ?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que
   $a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.
   **a.** Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.
   **b.** En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.
5. Quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ n'ont aucun point d'intersection ?

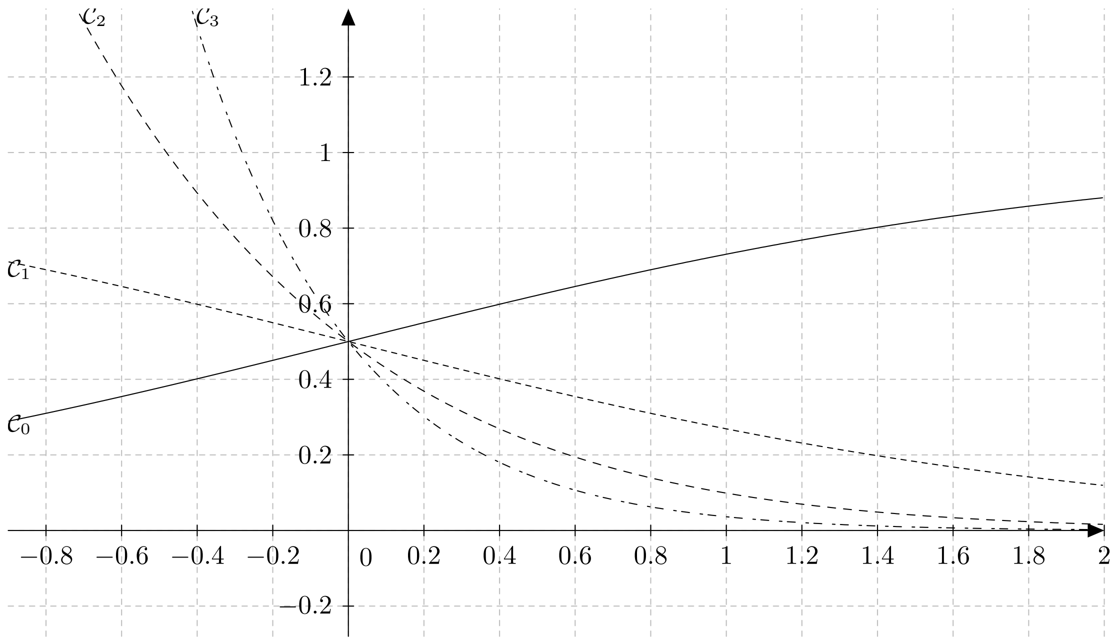
## Exercice 2

Soit $n$ un entier naturel.

On note $f_n$, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repére orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathcal{C}_0,\ \mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :




**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.

**2.** étude de la fonction $f_0$

  **a.** étudier le sens de variation de $f_0$.

  **b.** Dresser le tableau de variation de fonction $f_0$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** étude de la fonction $f_1$

  **a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel $x$.

  **b.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

**4.** étude de la fonction $f_n$ pour $n \geqslant 2$

  **a.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}$.

  **b.** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n''(x) = \dfrac{n^2e^{-nx} + (2n^2 - 2n - 1)e^{-x(n+1)} + (2n^2 -}{(1+e^{-x})^3}$

  En déduire la convexité de $f_n$ pour $n \geqslant 2$.

# 7 Un peu de probabilités...

**Exercice 1** Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes $\mathrm{U}_1$, $\mathrm{U}_2$ et $\mathrm{U}_3$ contenant chacune $k$ boules, où $k$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne $\mathrm{U}_1$, deux boules noires dans l'urne $\mathrm{U}_2$ et une boule noire dans l'urne $\mathrm{U}_3$, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne $\mathrm{U}_1$, note sa couleur et la remet dans l'urne $\mathrm{U}_1$ ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne $\mathrm{U}_2$, note sa couleur et la remet dans l'urne $\mathrm{U}_2$ ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne $\mathrm{U}_3$, note sa couleur et la remet dans l'urne $\mathrm{U}_3$.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : " Le dé amène le numéro 1. "

B : " Le dé amène un multiple de trois. "

C : " Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. "
N : " La boule tirée est noire."

**1.** Le joueur joue une partie.

  **a.** Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

  **b.** Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

  **c.** Déterminer $k$ pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

  **d.** Déterminer $k$ pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

**2.** Dans cette question, $k$ est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

**Exercice 2** Une urne contient 10 boules blanches et $n$ boules rouges, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 €et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 €.
On désigne par $X$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

**1.** Démontrer que : $P(X=-1)=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

**2.** Calculer, en fonction de $n$ la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable $X$.

**3.** Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ vaut :

$$\mathrm{E}(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$

**4.** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

**Exercice 3** Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$ ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$ ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul :

- $\mathrm{G}_n$ l'évènement " le joueur gagne la $n$-ième partie " ;
- $p_n$ la probabilité de l'évènement $\mathrm{G}_n$.

On a donc $p_1=0,1$.

**1.** Montrer que $p_2=0,62$.

**2.** Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

**3.** Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

**4.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$.

**5.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

**6.** Déterminer la limite de la suite $(p_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**7.** Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$ a-t-on : $\frac{3}{4}-p_n<10^{-7}$ ?

**8.** L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de $n$ à partir de laquelle $\frac{3}{4} - p_n$ est supérieur ou égal à $10^{-12}$.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

| | | |
|---|---|---|
| **Variables** | : | $n$ est un entier naturel |
| | | $p$ est un réel |
| **Initialisation** | : | Affecter à $n$ la valeur 1 |
| | | Affecter à $p$ la valeur 0,1 |
| **Traitement** | : | Tant que $3/4 - p < 10^{-12}$, faire : |
| | | Affecter à $p$ la valeur … |
| | | Affecter à $n$ la valeur … |
| | | Fin Tant que |
| **Sortie** | : | Afficher $n$ |